CURSO DE NIVELACIÓN
INGRESO FCA

MATEMÁTICA

Guía de Nivelación Teórica - Práctica

Año 2023

Facultad de Ciencias Agrarias

UNJu
Universidad Nacional de Jujuy

CURSO DE NIVELACION MATEMATICA

MODULOS A DICTARSE Y TEMAS CONTENIDOS EN CADA UNO DE ELLOS:

MODULOS I: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES. 1° PARTE.

La evolución del concepto de los números. Los números fraccionarios; convertir numero decimal en fraccionario, operaciones de números fraccionario. Potenciación, propiedades de la potenciación. Ejercicios combinados.

MODULOS II: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES. 2° PARTE.

Radicación, propiedades de la radicación, extraer del radicando todos los términos posibles, simplificación de raíces, llevar a radical único, reducción a común índice; Racionalización (primer y segundo caso). Notación científica, Concepto, cálculos y aplicaciones.

MODULOS III: CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRIA.

Concepto de Plano; plano cartesiano; Punto; Recta, Relaciones y Funciones. Concepto de perímetro y superficie, cálculos de distintos casos de figuras geométricas básicas con su respectiva formula.

MODULOS IV: POLINOMIOS 1° PARTE.

Concepto de monomio, partes de un monomio. Polinomios, concepto. Operaciones de polinomios: Suma y resta de monomios semejantes, Suma algebraica de polinomios, Multiplicación de un polinomio por un monomio, Multiplicación entre dos polinomios, División entre polinomios.

MODULOS V: POLINOMIOS 2° PARTE. MAGNITUDES Y UNIDADES.

Polinomios 2° parte: Regla de Ruffini. Teorema del Resto. Magnitudes y unidades: medidas de longitud, medidas de superficie, medidas agrarias, medidas de capacidad, medidas volumétricas.

MODULOS VI: FACTOREO.

Concepto de factoreo un polinomio. Distintos casos de factoreo: Factor común, Descomposición en grupo, Trinomio cuadrado perfecto, Cuatrinomio cubo perfecto, Diferencia de cuadrado, Suma y o diferencia de cubos.

MODULO I: CONJUNTO DE NÚMEROS Y OPERACIONES (1°PARTE)

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMEROS:

Clasificación de Números: NUMEROS REALES (**R**)

El campo de los números racionales e irracionales, recibe el nombre de números reales.

Dentro del conjunto de los números reales se pueden realizar suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz en el caso de que el subradical sea positivo.

Cuando el subradical es negativo, hay casos en que no hay dentro de los números reales un valor que cumpla con la definición de raíz.

	Conjunto Numérico	Simbología	Definición/Características	Operaciones que se pueden realizar	Ejemplos
Números Reales (R)	Números Naturales	N	Fueron creados ante la necesidad de contar. Los mismos constituyen la sucesión de números naturales que inicia del uno y crece indefinidamente 1,2,3,4,...	- Suma - Multiplicación - Resta (únicamente cuando el minuendo es mayor que el sustraendo) 6-4=2 4-7=?	1, 2, 3, 4, 5, 6,… $\frac{12}{4} = 3$ $\sqrt{49}$
	Números Enteros	Z	El conjunto de números enteros es el que se logra agregando al de números naturales, el concepto de cero y números negativos. ....-4, -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, 4,....	- Suma, - Multiplicación - Resta - División (solo es factible cuando el dividendo es múltiplo exacto del divisor). $\frac{12}{4} = 3 \therefore 3 \times 4 = 12$ En cambio la división $\frac{15}{4} =?$ no es posible por cuanto no existe un numero entero que multiplicado por cuatro de cómo resultado 15.	...-3,-2,-1,0,1,2,3… $-\frac{12}{2} = -6$ $\sqrt[3]{-27}$
	Números Racionales	Q	Los números racionales son todos los números que son susceptibles de ser expresados como una fracción, es decir, como el cociente de dos números enteros.	- Suma - Multiplicación - Resta - División	69,96 (1749/25) 86,5 (173/2) 55,7272727 (613/11)

MODULO I: CONJUNTO DE NÚMEROS Y OPERACIONES (1°PARTE)

	Números Irracionales	I	Los números Irracionales son todos aquellos números que no pueden expresarse como fracciones. Esto se debe básicamente a que cuentan con cifras decimales no periódicas de manera interminable, o infinita	Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división no son operaciones bien definidas en los números irracionales,	$\sqrt{2} = 1{,}4142135....$ $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ $\pi = 3{,}1415926...$ e = 2,71828…

Se entiende por *número fraccionario* o fracción al cociente indicado de dos números enteros tales que el dividendo no sea múltiplo exacto del divisor. Ej. $\frac{4}{5}$, $-\frac{15}{8}$, $\frac{5}{9}$, etc

Dentro de las fracciones o números fraccionarios podemos dividirla en:

- *Fracciones puras*: son las fracciones propias, cuyo cociente es menor a la unidad, es decir el numerador es menor que el denominador ej.:$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, etc
- *Fracciones Impuras*: se llaman impuras porque su cociente nos da un valor mayor a la unidad, es decir el numerador es mayor al denominador $\frac{8}{5}$, $\frac{15}{11}$, etc
- *Fracciones aparentes*: son aquellas que representan a un número entero ej: $\frac{9}{3}$, $\frac{21}{7}$, etc

IGUALDAD O DESIGUALDAD ENTRE DOS FRACCIONES

En la comparación de dos fracciones, a los fines de determinar cuál de ellas es mayor, o si ambas son iguales se utilizan los siguientes criterios:

a) Dada dos fracciones positivas de igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
b) Dada dos fracciones negativas de igual denominador es mayor la que tiene menor numerador.
c) Dadas dos fracciones una positiva y otra negativa, es mayor siempre la positiva.
d) Dada dos fracciones positivas de distinto denominador, es mayor aquella para la cual resulta mayor el producto de su numerador por el denominador de la otra.
e) Dada dos fracciones negativas de distinto denominador, es mayor aquella para la cual resulta menor el producto de su numerador por el denominador de la otra. Por ejemplo:

$\frac{6}{5} > \frac{4}{5}$; $-\frac{6}{7} < -\frac{1}{7}$; $\frac{3}{4} > -\frac{5}{2}$; $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{5}{3} > \frac{6}{5}$; $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{7}$

Las fracciones al tratarse de números podemos realizar distintas operaciones algebraicas como suma, resta, producto y división.

* Números decimales Periódicos

Los números racionales se pueden expresar como fracciones. Incluso los números decimales periódicos (aquellos en los que hay un periodo, o número de cifras que se repite indefinidamente), pueden expresarse como fracción.

- Por ejemplo el número periódico: $0{,}6565..$ de período 65 se puede expresar como una fracción que tiene como numerador el período y como denominador tantos nueve como dígitos tiene el período.

  0,656565...= $\frac{65}{99}$
- Otro ejemplo sería: 4,363636... En estos casos se coloca en el numerador la parte entera del número inicial, seguido del periodo menos el número entero y como denominador tantos nueve como dígitos tiene el periodo:

  4,3636… = $\frac{436-4}{99} = \frac{432}{99}$

- Tenemos el caso de Números decimales periódico mixto: ej: $0{,}3\hat{4}$

  Vamos a explicar este caso también mediante un ejemplo. En este caso se coloca en el numerador la parte anterior al periodo seguido del periodo menos la parte anterior al periodo y como denominador tantos nueve como dígitos tiene el periodo y rellenamos con ceros de acuerdo a la misma cantidad de números existentes antes del período:

  $0{,}3\hat{4} = \frac{34-3}{90} = \frac{31}{90}$

  Como la fracción obtenida es irreducible nos la quedamos.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES.

- SUMA O RESTA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR.

La suma o resta de dos o más fracciones de igual denominador es otra fracción que tiene el mismo denominador, y por numerador la suma o resta de los numeradores de las fracciones dadas. Ejemplo:

$$\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

- SUMA O RESTA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR.

Para sumar o restar fracciones de distinto denominador, debemos calcular el “mínimo común múltiplo de los denominadores” y para transformar la suma o resta en un caso apartado anterior, se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente entre el denominador común obtenido (mínimo común múltiplo) y el denominador de cada fracción. Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{[(12\div 3)\times 2]+[(12\div 12)\times 7]-[(12\div 4)\times 1]}{12}=\frac{8+7-3}{12}=\frac{12}{12}=1$$

- PRODUCTO DE FRACCIONES.

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores de las fracciones dadas. Ejemplo

$$\frac{1}{5}\ x\left(-\frac{3}{2}\right)\ x\ \frac{5}{4}\ =\ -\ \frac{15}{40}$$

- DIVISION DE FRACCIONES

El cociente entre de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador, el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor; y por denominador el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor. Esto puede lograrse también multiplicando la fracción del dividendo por la inversa o reciproca de la fracción divisor. Ejemplo.

$$\frac{1}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{6}{20}$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{6}{20}$$

POTENCIACION.

Definición: Cuando multiplicamos un número por sí mismo, podemos expresar esa multiplicación como la potencia del mismo número.

$$a \times a \times a \times = a^3$$

Al factor que multiplicamos repetidas veces lo llamamos “base de la potencia” (en este caso *a*). El número de repeticiones se llama “exponente” en nuestro caso 3.

$a \times a = a^2$	se lee *a* al cuadrado
$a \times a \times a = a^3$	se lee *a* al cubo
$a \times a \times a \times a = a^4$	se lee *a* a la cuarta.

PROPIEDADES.

Leyes de los exponentes		Ejemplos
Potencia de exponente 0	$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
Potencia de exponente 1	$a^1 = a$	$5^1 = 5$
Multiplicación de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$25^2 \times 25^3 = 25^{2+3}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$25^4 \div 25^3 = 25^{4-3}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(47^3)^2 = 47^{2\times3}$
Multiplicación de potencias con base diferente	$(a.b.c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$(3\ x\ 7\ x15)^3 = 3^3x\ 7^3x15^3$
División de potencias con diferente base	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{21}{3}\right)^2 = \frac{21^2}{3^2}$
Exponente negativo a fracción	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$21^{-3} = \frac{1}{21^3}$
Exponente positivo a fracción	$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$21^3 = \frac{1}{21^{-3}}$
División de exponente negativo con diferente base	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{125}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{125}\right)^3$
Exponente fraccionario	$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$27^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{27^3}$

Tener en cuenta que la potencia no es distributiva respecto de la suma y la resta.

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \quad ; \quad (a-b)^n \neq a^n - b^n$$

MODULO I

TRABAJO PRACTICO: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES (1° PARTE)

Simbolismo usual:

N: Conjunto de los números naturales

$\mathbf{Z}^-$: Conjunto de los números entero-negativos

Z: Conjunto de los números enteros

$\mathbf{F_p}$: Conjunto de los números fraccionarios puros

Q : Conjunto de los números racionales

I: Conjunto de los números irracionales

R : Conjunto de los números reales

$\in$: "pertenece a ..." (Pertenencia entre elemento y conjunto)

EJERCICIO Nº1: Utilizando la simbología clasificar en cada ejemplo a qué conjunto/s numérico/s pertenecen ($\in$) los siguientes números:

a) 8 b) -3 c) $\frac{5}{4}$ d) 157 e) 0,71 f) $-\sqrt{38}$ g) $-\frac{7}{3}$ h) $\sqrt[3]{8}$ i) $\sqrt[3]{64}$

j) π k) 0 l) $2{,}1333)\ldots..$ m) $\sqrt{-1}$ n) $\sqrt{1}$ ñ) $(-8)^2$ o) $\sqrt[3]{3}$ p) $\sqrt{36}$

Ejercicio Nº2: Responder con verdadero (**V**), o falso (**F**), según corresponda, en cada uno de los siguientes casos:

a) 0,3574 $\in$ **Q** b) - 12 $\in$ **N** c) $2{,}716\widehat{589} \in$ **I**

d) $\sqrt{7} \in$ **R** e) $-\sqrt{144} \in$ **Z** f) $\sqrt{50} \in$ **N**

Ejercicio Nº3: Dados los números:

5,2159 - 5,2159$\hat{7}$ - 5,2159024845 - 5,21590$\hat{7}$

Responder

a) ¿Cómo son entre sí los números

b) ¿Podes ordenarlos en forma creciente?

Ejercicio Nº4: Las siguientes fracciones, ¿son puras, impuras o aparentes?

$\frac{5}{13}$ $-\frac{7}{9}$ $\frac{534}{97}$ $-\frac{2}{7}$ $-\frac{15}{3}$ $\frac{10}{99}$ $\frac{49}{7}$

Ejercicio Nº5: Indicar el sentido de desigualdad, o igualdad entre las siguientes fracciones.

a) 3/2 6/4 b) 7/3 24/7 c) -3/7 -8/3

d) 3/18 3/16 e) 6/5 7/2 f) 9/3 -11/7

g) 60/5 84/7 h) -147/21 -245/35 i) 3/9 9/3

j) 8/5 7/3 k) 3/2 -3/2 l) 7/8 49/56

Ejercicio Nº 6: Escribir los siguientes números decimales como fracciones

a) 0,9 b) 0,$\hat{3}$ c) 3,25

d) 3,125 e) 1,20$\hat{7}$ f) 0,$\widehat{256}$

g) 0,$\widehat{152856}$

Ejercicio Nº7: Sumar las siguientes fracciones

a) 7/4 + 3/4 + 8/4 - 7/4 = b) -2/6 + 5/6 - 9/6 =

c) 25/7 + 123/8 - 133/15 = d) 11/9 - 3/5 + 122/10 =

e) 12/21 - 1/3 + 127/7 = f) 27/7 + 155/28 - 214/4 =

Ejercicio Nº8: Calcular mentalmente:

a) 1 – 2/7 = b) 2 + 1/2 =

c) 5 – 1/3 = d) 3/2 + 4 =

e) 3 – 2/5 = f) 1/5 - 3 =

Ejercicio Nº 9: Realizar las siguientes operaciones combinadas:

a) 25 (-1/5 +7) + 12 . 5/6 - 7= b) – 2/3.(3) – 1/8 (+4-1/5) -4 =

c) 1/6 (1/8 - 8 (-3/4)) – 3 (1 - 1/9 + 6) = d) – 21 – (- 10) + ¼ - 8 =

e) – 3 +(12(-/7) + 8 – 1(-7/3)) = f) 25 (– 6/7(-9)) - (– 4 + 5/16 + 10) =

g) – 1/2 – (5/3 +6 – 3/5) – (+ 4) = h) (- 1/4) – (7/8. 6) + (- 9/3-1) – (- 5/4) =

Ejercicio N° 10: Encontrar el valor “x” en las siguientes ecuaciones

a) 5 – 9x = 7x – 10 b) 3. (-5 - x +12) = 87 –38 c) 1/48x – 5 = 3x – 2/7

d) 2x – 3 = 5x + 6 e) 1/3x +25/7 = 1/4x +3 f) 6.(1/2x) – 2x = 25 + x

g) 7. (y/5) + 2y = 37 h) 5/4 x + 14x = 34 i) -6/5 + 4/7 x +62 = 17– x

j) (x-3/4)/7 – (x-2/3)/14 = - 36 k) 2/5 (2x+2) = x + 9 l) 7 x – 3/8 x + 27 = 4 x

Ejercicio Nº11: Resolver los ejercicios combinados siguientes (el signo "." simboliza una multiplicación):

a) $5 + 3 \,.\, 5 =$

b) $5 \,.\, 3 + 9 \,.\, 7 =$

c) $9 - 8 : 4 =$

d) $12\,(-3) + 35 : (-7) =$

e) $7 - (-2) \,.\, 0 + 18 : (-6) + 6 =$

f) $(-4)^3 + (-4)^2 =$

g) $(+3)^2 \,.\, (-2) : \sqrt{36} + 8 =$

h) $\sqrt{(-3)^2 - (-3+8)} - (-3)^3 =$

i) $\dfrac{\frac{2}{5} - \frac{3}{4}}{\left(-\frac{7}{5}\right)^2} =$

Ejercicio Nº12: Aplicando las propiedades de la potenciación expresar los siguientes productos y cocientes como potencias únicas; luego calcular el resultado final.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^3 : \left(-\frac{4}{7}\right) =$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} =$

d) $0{,}7^{3} \cdot 0{,}7^{-2} \cdot 0{,}7 =$

e) $(-0{,}9)^{-8} : (-0{,}9)^{-6} =$

f) $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{3}\right]^{-2} =$

g) $[(2{,}7)^{-1}]^{2} =$

h) $\left[(-3{,}5)^{-\frac{2}{3}}\right]^{3} =$

i) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{5}}\right]^{-\frac{5}{2}} =$

MODULO II: CONJUNTO DE NÚMEROS Y OPERACIONES (2°PARTE).

Radicación.

La raíz enésima de un número "**a**" es un número "**b**" siempre que $b^n = a$. $\sqrt[n]{a} = b \therefore b^n = a$.
El número que está dentro de la raíz se denomina radicando (a), el grado de una raíz se denomina índice del radical (n)

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \therefore \quad b^n = a$$

Ej. $\sqrt[5]{32} = 2 \therefore 2^5 = 32$

Podemos decir que la radicación es una operación inversa de la potenciación (ya que estamos calculando la base de la potencia, conociendo la potencia y el exponente).

Así mismo por una propiedad vista para la potenciación, la raíz de índice "n" puede expresarse como potencia de exponente 1/n.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Del mismo modo: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Por esta razón las propiedades vistas para potenciación son válidas para la radicación.

Propiedades:

Propiedad	Expresión simbólica	ejemplo
Raíz de índice *"n"*	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ $\sqrt[1]{a} = a$	$\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[1]{8} = 8^{\frac{1}{1}} = 8$
Distributiva en multiplicación y/o división	$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{(-27) \times 125} = \sqrt[3]{(-27)} \times \sqrt[3]{125}$ $= (-3\,.5) = -15$ $\sqrt{\frac{16}{0{,}04}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{0{,}04}} = \frac{4}{0{,}2} = 20$
No es distributiva en suma y/o resta	$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{125 \pm 8} \neq \sqrt[3]{125} \pm \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{133}$ $\neq 5 + 2$ $5{,}1 \neq 7$
Multiplicación de igual base	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = a^{1/n} a^{1/m} =$ $a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{n \times m}} = \sqrt[n \times m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[3]{125} \times \sqrt[4]{125} = 125^{1/3} 125^{1/4} =$ $125^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 125^{\frac{4+3}{3 \times 4}} = \sqrt[3 \times 4]{125^{3+4}}$ $= \sqrt[12]{125^7}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$

NOTA: Como la radicación es la operación inversa de la potenciación se puede simplificar índices con exponentes. Dividiendo ambos por un mismo número como en los siguientes ejemplos.

Ej: $\sqrt[2]{(4)^{12}} = (4)^6$

$\sqrt[3]{(3)^3} = 3$

$\sqrt[3]{(-5)^6} = (-5)^2$

SACAR TERMINOS FUERA DEL SIGNO RADICAL.

Los términos que dentro del radical se encuentran con exponente, en valor absoluto, igual o mayor que el índice de la raíz, pueden extraerse fuera del signo radical. Salen afuera con un

exponente igual al cociente entre el exponente que tenía y el índice de la raíz, dentro del radical el referido termino queda con un exponente igual al resto del mencionado cociente.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{32\,.\,a^{12}\,.\,b^{11}.\,c^3}$$

Esta raíz la podemos escribir de la siguiente manera: $\sqrt[4]{2^5.\ a^{12}.\ b^{11}.\ c^3}$.

Según lo enunciado precedentemente, los términos que pueden extraerse fuera del signo radical son **2, a, b,** puesto que son los únicos que están afectados por un exponente mayor que el índice **4** de la raíz.

La división entre el exponente 5 (exponente de 2) y el índice 4 tiene como cociente y resto igual a la unidad, por lo tanto el factor "2" sale de la raíz con un exponente igual a uno y queda dentro del signo radical con exponente igual uno. El cociente entre 12 (exponente de "a") y 4 (índice de la raíz) es igual a tres y resto cero; por ende el factor "a" sale fuera del radical con exponente igual a 3 y queda dentro de la raíz con exponente igual a cero. De la misma manera la división entre 11 y 4 arroja un cociente igual a dos y resto igual a tres, por lo tanto el factor "b" sale fuera del signo radical con exponente igual a dos y permanece dentro de la raíz con exponente igual a tres.

$$\sqrt[4]{2^5.\ a^{12}.\ b^{11}.\ c^3} = 2^1.a^3.b^2.\sqrt[4]{2^1.a^0 b^3.\ c^3} = 2\,.\,a^3\,.\,b^2.\sqrt[4]{2\,.\,b_3.\ c^3}$$

SIMPLIFICACION DE RAICES

Para simplificar raíces se divide el índice de la raíz y el exponente del subradical por el mismo número. En el ejemplo que tenemos el índice de la raíz es quince y los exponentes de cada subradical son seis, tres, y nueve. Para simplificar debemos dividir el índice y los exponentes por un mismo número, *en este caso todos son divisibles por tres*; luego la raíz queda de índice cinco y los exponentes quedan reducidos a dos, uno, y tres respectivamente.

$$\sqrt[15]{3^6.\ x^3.\ z^9} = \sqrt[5]{3^2.\ x\ .\ 9^3}\ \ (el\ indice\ y\ los\ exponentes\ fueron\ dividido\ por\ tres).$$

REDUCCION A MINIMO COMUN INDICE

Dado un cierto número de raíces se puede reducir las mismas a "minino común índice". El mínimo común índice es el mínimo común múltiplo de los índices. Los factores quedan dentro del subradical afectados de un exponente que se obtiene de multiplicar el exponente que tenían por un factor igual al que utilizaron para pasar del índice original, de la respectiva raíz, al índice común.

En el ejemplo siguiente se trata del producto de tres raíces cuyos índices son tres, cinco y seis respectivamente. *Queremos obtener para todas un mismo índice*. El mínimo común múltiplo de los índices en cuestión es treinta. Las tres raíces dadas deben quedar con índice treinta, en consecuencia, para obtener una expresión equivalente a la dada debemos

multiplicar en cada subradical los exponentes a los que estaban elevados los factores en ellos contenidos por un número igual al que multiplicamos los índices respectivos para obtener treinta. En la primera raíz para pasar del índice tres al treinta multiplicamos el índice tres por diez, por lo tanto, el exponente igual a uno que se encuentra elevado el subradical también debe de ser multiplicado por diez; y así procedemos con las otras dos raíces.

$$\sqrt[3]{}.\sqrt[5]{x^3}.\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[30]{x^{10}}.\sqrt[30]{x^{18}}.\sqrt[30]{x^{20}} = \sqrt[30]{x^{10}.\ x^{18}.\ x^{20}} = \sqrt[30]{x^{48}}$$

RACIONALIZACION

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división reciben el nombre de "Operaciones algebraicas".
Una expresión compuesta por números en cifras o letras vinculadas con las operaciones algebraicas se conoce como "Expresión Algebraica".

Si en una expresión algebraica figura en el denominador la operación de radicación dicha expresión algebraica se denomina irracional. *La operación para eliminar la Raíz del denominador (mediante las propiedades vistas) se conoce como "Racionalización".* Vamos a ver dos casos de racionalización.

1. Cuando en el denominador figura un solo termino formado por una raíz de cualquier índice, se procede de la siguiente manera: se multiplica numerador y denominador por una raíz de igual índice y cuyo subradical esté formado por iguales factores que los de la raíz que queremos eliminar. Los factores del subradical (por el que multiplicamos y dividimos) deben estar elevados a un exponente tal que sumados a los que tenían en la raíz a eliminarse nos dé un valor igual al índice de aquella. A continuación, se simplifica quedando así eliminada la raíz del denominador. Ejemplo:

$$\frac{3.a^2.b}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}}$$

Ejemplo: Para racionalizar la siguiente fracción multiplicamos numerador y denominador por una raíz de índice cinco. El subradical de dicha raíz debe estar formado por el producto de los factores 3, a, y b, elevados a la potencia tres, tres y uno respectivamente. En el denominador queda el producto de dos raíces de igual índice, por lo que por la reciproca de la propiedad distributiva de la radicación respecto del producto podemos colocar todos los factores debajo de una misma raíz. Aplicando a continuación al subradical el producto de potencia de igual base obtenemos potencia de exponente igual al índice de la raíz procediendo finalmente a simplificar.

$$\frac{3.a^2.b}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}} = \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b^1}}{\sqrt[5]{3^2.a^2.b^4}.\sqrt[5]{3^3.a^3.b^1}} = \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}{\sqrt[5]{3^5.a^5.b^5}} = \frac{3.a^2.b.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}}{3.a.b} = a.\sqrt[5]{3^3.a^3.b}$$

2. Otro de los casos que vamos a ver es cuando el denominador de la expresión algebraica está formado por un binomio en el cual uno o sus dos términos son raíces cuadráticas, es decir de índice igual a dos. En estos casos se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio es otro binomio que tiene los mismos términos, pero cambiado el signo que vincula a ambos términos. Recordando que:

$$(a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$$

$$Diferencia\ de\ cuadrados\ (quinto\ caso\ de\ factoreo).$$

Se elevan al cuadrado los dos términos del binomio eliminándose de esta manera las raíces del denominador.

Ejemplo: Racionalizar la siguiente expresión, en la que el denominador es un binomio que tiene como uno de sus términos una raíz cuadrada. Multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Luego aplicamos al denominador la diferencia de cuadrados enunciada arriba.

$$\frac{3x}{\sqrt{z}-3y} = \frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{(\sqrt{z}-3y).(\sqrt{z}+3y)} = \frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{(\sqrt{z})^2-(3y)^2} = \frac{3x.(\sqrt{z}+3y)}{z-9y^2}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

a) PRODUCTO DE UN NUMERO POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS:

El producto de un número por la unidad seguida de ceros es el que se logra agregando al número dado tantos ceros como los que acompañan a la unidad. Cuando se trata de número con parte decimal, se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad, si fuera necesario se agregan tantos ceros a continuación de la última cifra significativa hasta lograr el número de lugares indicado por los ceros.

Ejemplo: 5· 100 = 100 ; 4,235 · 10000 = 42350

b) DIVISIÓN DE UN NUMERO POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS:

La división de un número por la unidad seguida de ceros se logra corriendo la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplo: 3 ⏐100 = 0,03 ; 2,45 ⏐1000 = 0,00245

c) EXPRESAR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS COMO POTENCIA DE DIEZ.

La unidad seguida de ceros se puede expresar como una potencia de base diez y exponente igual al número de ceros que acompañan a la unidad.

Ejemplo: $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $100000 = 10^5$

Del mismo modo la unidad precedida de ceros se puede expresar como una potencia de base diez con un exponente negativo y de valor absoluto igual al número de ceros que anteceden a la unidad más uno, contados a partir de la coma decimal.

Ejemplo: $0,01 = 10^{-2}$; $0,001 = 10^{-3}$; $0,0001 = 10^{-4}$

d) NOTACIÓN CIENTÍFICA:

La notación científica es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar muy fácilmente números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo el Nº de bacterias patógenas en una determinada cantidad de muestra de agua resultaría un número excesivamente grande que quizás no nos alcanzaría la hoja para escribirlo por la cantidad de ceros que contiene.

Un número está expresado en notación científica cuando se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{N^o = p \cdot 10^k}$$

Donde, "**p**" es un número decimal que cumple con la condición $\mathbf{1 \leq p < 10}$ y "**k**" es un número entero.

Ejemplo:

$164200 = 1,64 \cdot 10^5$; $0,0000341 = 3,41 \cdot 10^{-5}$

MODULO II

TRABAJO PRACTICO: CONJUNTO DE NUMEROS Y OPERACIONES (2º PARTE)

EJERCICIO Nº1: Extraer fuera de la raíz todos los términos posibles:

a) $\sqrt[3]{256\,c\,z^2y^7x^4}$ b) $\sqrt{16807\,y\,m^5x^2}$ c) $\sqrt[5]{3125\,t^3m^4y^8}$

d) $\sqrt[7]{\frac{125\,t^{11}z^4\,x^9}{y^{-7}}}$ e) $\sqrt[3]{4000k^{17}\,x^8\,y^{12}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{x^{17}}{y^8}\,y^{16}\,m^{21}}$

EJERCICIO Nº2: Simplificar las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2401\,x^4y^8t^6}$ b) $\sqrt[6]{y^3m^{42}x^{24}}$ c) $\sqrt[25]{3125\,x^{10}w^{15}z^{30}}$

d) $\sqrt[16]{6561\,x^{32}k^8m^{48}}$ e) $\sqrt[14]{16384\,x^{28}h^7z^{35}}$ f) $\sqrt[9]{m^{18}g^{36}z^{81}}$

EJERCICIO Nº3: Llevar las siguientes expresiones como radical único y resolver si fuera posible:

a) $\sqrt{x^2}\quad\sqrt{x^7}\quad\sqrt{x^{-3}}$ b) $\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{x^5m^7} \div \sqrt[3]{y^6m^{-3}}$

c) $\sqrt[5]{x^{12}z^4}\ \sqrt[5]{z^{-2}y^7m^8}\ \sqrt[5]{m^5x^{-3}}$

d) $\sqrt[4]{x^2y^5}\ \sqrt[4]{s^3c^7} \div \sqrt[4]{s^{-9}x^6t^9}$ e) $\sqrt{x^{-3}y^2}\ \sqrt{c^5y^7x^{11}}\ \sqrt{x^3m^7}$ f) $\sqrt[3]{m^5z^3} \div \sqrt[3]{s^8z^{-5}x^7}$

EJERCICIO Nº4: Racionalizar las siguientes expresiones

Primer Caso:

a) $\frac{3ax^2}{\sqrt[5]{x^3a^2y^4}} =$ b) $\frac{m^2y^5x^4}{\sqrt[7]{x^3\,y^9\,m^4}} =$ c) $\frac{t^2s^5}{\sqrt[9]{t^{-5}\,y^4\,s^5}} =$ d) $\frac{3\,x^2z^2w^7}{\sqrt[5]{x^4\,w^2\,y^8}} =$

e) $\frac{5}{\sqrt[4]{37}} =$ f) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}} =$ g) $\frac{3xmy}{\sqrt[3]{x^9y^7z^5}} =$ h) $\frac{5t^5m^2}{\sqrt[5]{7m^4t^2}}$

Segundo Caso:

i) $\frac{x^2y^4}{3x-\sqrt{x\ y}} =$ j) $\frac{5}{3+\sqrt{7}} =$ k) $\frac{35}{\sqrt{31}-5} =$ l) $\frac{93}{14-\sqrt{17}} =$

ll) $\frac{m^3y^2z^5}{2mx-\sqrt{x\ z}} =$ m) $\frac{7\ s\ z^3\ \sqrt[3]{x}}{zx-\sqrt{x^2s^3}} =$ n) $\frac{2x\ y}{5x+\sqrt{x^3s^5y^7}} =$

EJERCICIO Nº6: Expresar los siguientes números en Notación Científica:

a) 125000000 = b) 0,00000000258 = c) 35900000 = d) 0,000000006589 =

e) 4890000000000 = f) 0,0000987 = g) 529,2 = h) 217000000 =

EJERCICIO Nº7: Expresar los siguientes números en Notación Vulgar:

a) $3{,}58 \times 10^5 =$ b) $0{,}56 \times 10^8 =$ c) $358{,}7\ 10^{-6} =$ d) $23 \times 10^4 =$

e) $0{,}17 \times 10^{-9} =$ f) $7923{,}68 \times 10^{-5} =$ g) $0{,}0058 \times 10^7 =$ h) $0{,}23 \times 10^8$

EJERCICIO Nº8: Expresar los siguientes números en Notación Científica y resolver:

a) $\frac{98500000\ x\ 74300000}{215000000} =$ b) $\frac{0{,}0000868\ x\ 5368000000}{0{,}00000157} =$ c) $\frac{23680000000\ x\ 9870000000}{0{,}000017\ x\ 0{,}000000089} =$

d) $\frac{0{,}0003748}{0{,}000000125} =$ e) $\frac{0{,}0000069\ x\ 1258000000}{3650000\ x\ 0{,}001258} =$ f) 120000 x 0,326 / 0,0000789 =

MODULO III: CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA.

La geometría es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas del plano, del espacio y de sus relaciones empleadas para la medición de extensiones. La geometría es muy importante debido a que permite enseñar y aprender el arte de razonar, porque es abstracta, pero fácil de visualizar y tiene muchas aplicaciones concretas como, por ejemplo, calcular el área de un lote a ser sembrado, determinar el volumen de un tanque australiano para racionar el agua a una determinada cantidad de ganado, fijar alturas, pendientes, construir corrales de ganado bien estructurados, invernaderos eficientes en captar la energía solar etc.

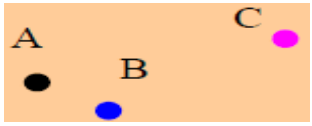
Geometría plana

La geometría plana estudia las figuras planas, que tienen únicamente dos dimensiones: largo y ancho.

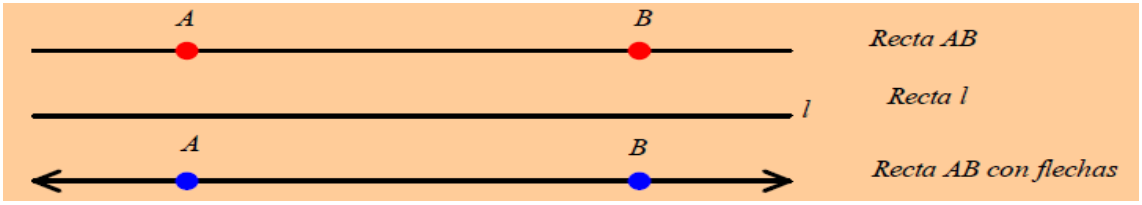
Conceptos básicos

Para el estudio de la geometría, es indispensable conocer el concepto intuitivo de **punto, recta y plano.** Estos son términos no definidos que proveen el inicio de la geometría.

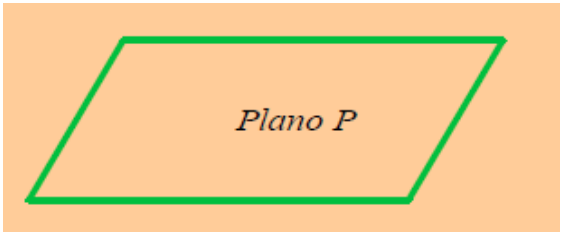
Punto: es el objeto fundamental en geometría, el punto representa solo posición y no tiene dimensión, es decir, largo cero, ancho cero y altura cero. Se representan por letras mayúsculas.



Recta: tiene solo longitud, no tiene ancho ni altura ni grosor. Es un conjunto infinito de puntos que se extienden en una dimensión en ambas direcciones. Una recta se puede representar por:

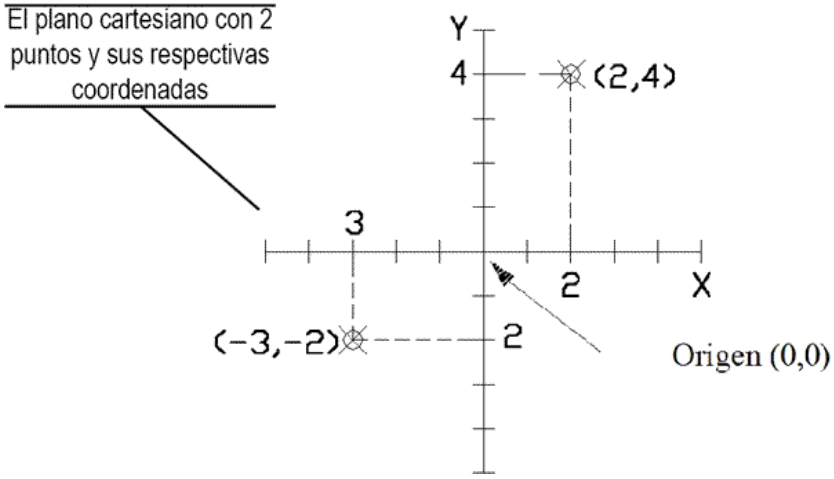


Plano: tiene ancho y largo, sin altura ni grosor. Un plano es una superficie en dos dimensiones, se puede pensar como un conjunto de puntos infinitos en dos dimensiones.



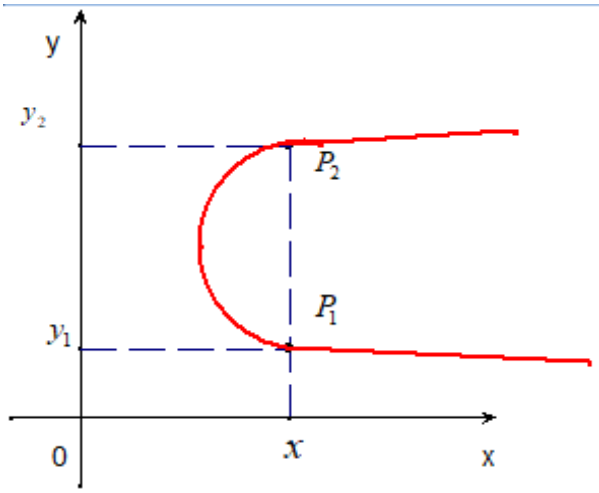
Plano Cartesiano

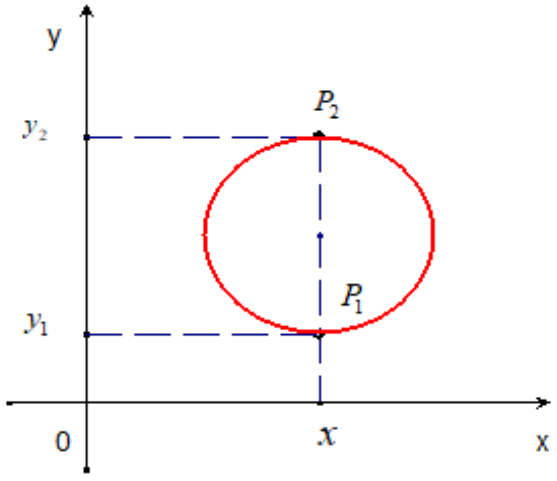
El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen. El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Ejemplo



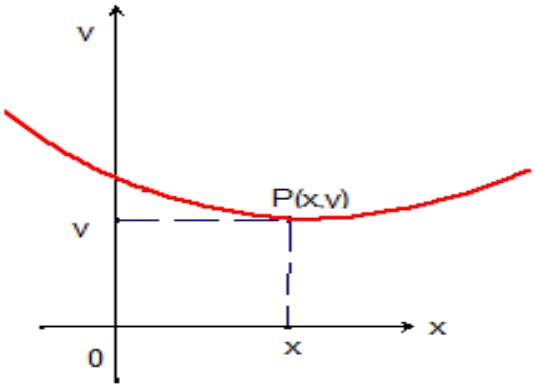
Relaciones y funciones

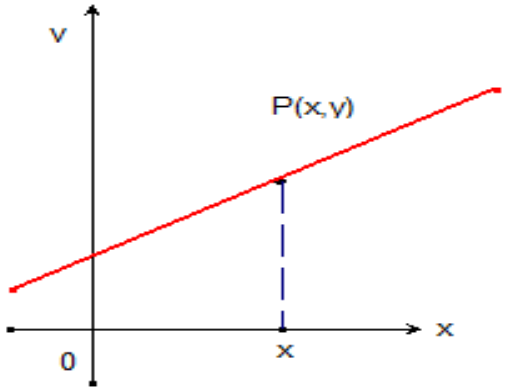
Relación matemática: se trata de la correspondencia que existe entre dos conjuntos: a cada elemento del primer conjunto le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto. **geométricamente** es una gráfica en el plano en la cual existen dos o más puntos que comparten la misma primera coordenada. Ejemplo: la parábola de eje de simetría horizontal y la circunferencia





Una **función** (f) es una relación entre un conjunto dado **X** (llamado dominio) y otro conjunto de elementos **Y** (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio. Geométricamente es una gráfica en el plano Cartesiano en la cual no existen dos o más puntos que compartan la misma primer coordenada x. Ejemplo la parábola de eje de simetría vertical y una recta cualquiera no paralela al eje Y.





Concepto de Perímetro y Superficie.

El perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados de una figura geométrica plana. Se refiere al **contorno de una superficie o de una figura** y a la **medida de ese contorno**.

La medida del perímetro de una figura depende de la unidad elegida, se mide en unidades lineales. Ej. cm, m, km, etc.

Conocer el perímetro de un campo, por ejemplo, permite definir qué cantidad de material se necesita para alambrarlo. De igual forma, el perímetro es un dato esencial para diseñar campos de pastoreo diferenciado

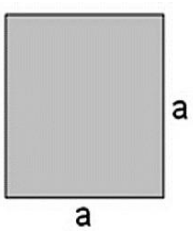
La porción del plano que ocupan las figuras se denomina **superficie.** La medida de esa superficie se llama área.

La medida del área de una superficie depende de la unidad elegida, se mide en unidades cuadradas. Ej. m^2 km^2, cm^2 etc.

El cálculo de áreas es fundamental en todas las ciencias por ejemplo en las agropecuarias permite tomar decisiones sobre los sembradíos respecto a dosificaciones de plaguicida, para delimitar potreros de engorde, planificar la cantidad de m^2 por animales en corrales de encierre etc.

Perímetro y Superficie de planos conocidos

Cuadrado:



- **Perímetro:**

$$P = 4 \cdot a$$

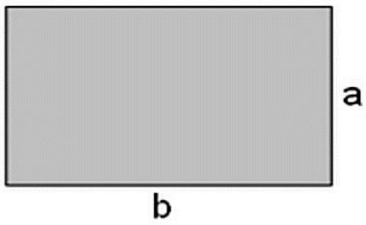
- **Área:**

$$A = a^2$$

- **Elementos:**

a : lado.

Rectángulo



- **Perímetro:**

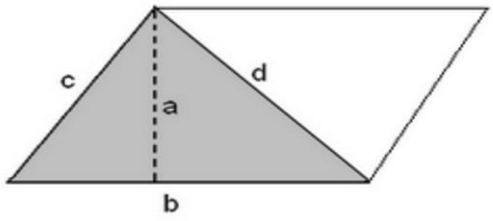
$$P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

- **Área:**

$$A = a \cdot b$$

- **Elementos:**
  - b : base.
  - a : altura.

Triángulos



- **Perímetro:**

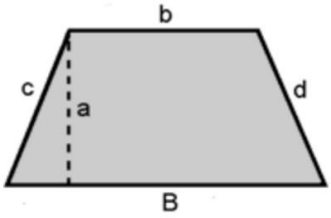
$$P = b + c + d$$

- **Área:**

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

- **Elementos:**
  - b : base.
  - a : altura.
  - c , d : lados.
- **Nota:**
  Un triángulo es la mitad de un paralelogramo.

Trapecios



- **Perímetro:**

$$P = b + B + c + d$$

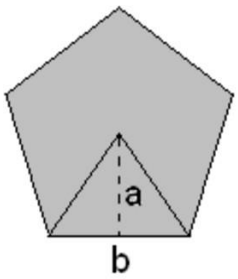
- **Área:**

$$A = \frac{(B + b) \cdot a}{2}$$

- **Elementos:**
  - B : base mayor.
  - b : base menor.
  - a : altura.
  - c , d : lados.

Bhhhhhhñ-

Polígonos Regulares



- **Perímetro:**

$$P = n \cdot b$$

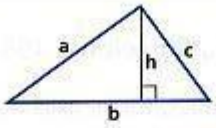
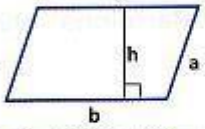
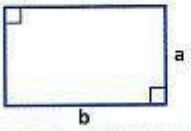
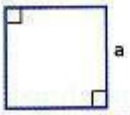
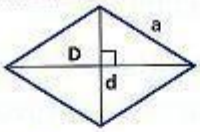
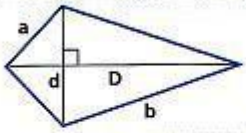
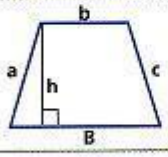
- **Área:**

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

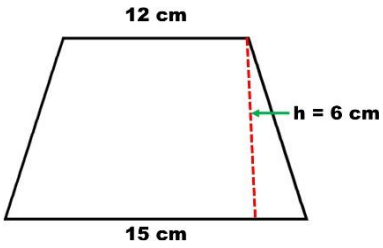
- **Elementos:**
  - b : lado.
  - a : apotema.
- **Nota:**
  n : número de lados.

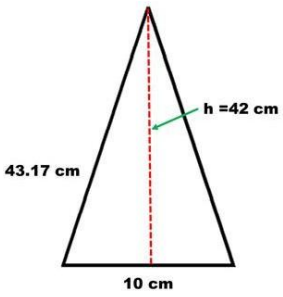
MODULO III

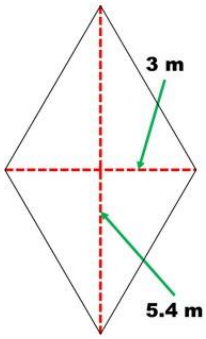
TRABAJO PRACTICO: GEOMETRIA (Cálculos de perímetros y superficies)

Perímetros y áreas de figuras planas	Perímetro	Area
Triángulo 	$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo 	$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo 	$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado 	$4 \cdot a$	a^2
Rombo 	$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa 	$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio 	$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo	$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

EJERCICIO Nº1: Calcular perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

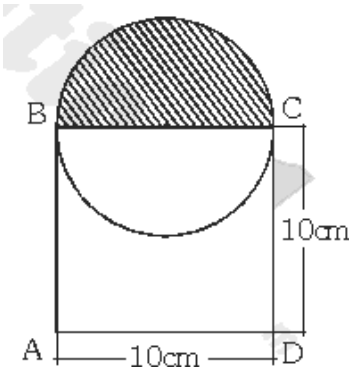




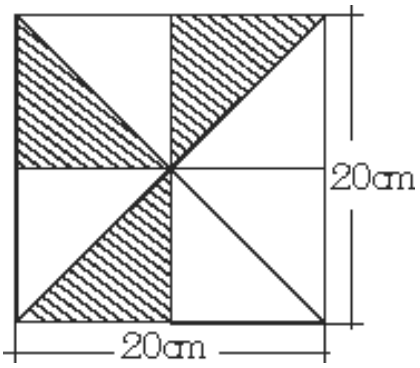


EJERCICIO Nº2: Calcular las superficies sombreadas de las figuras que a continuación se muestran:

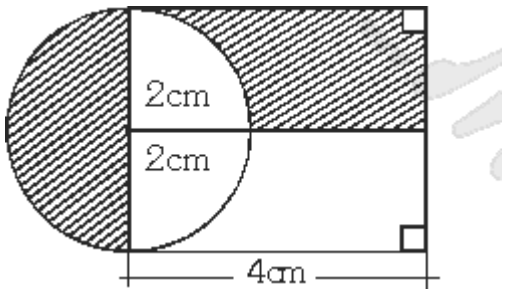
a)



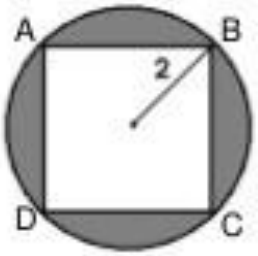
b)



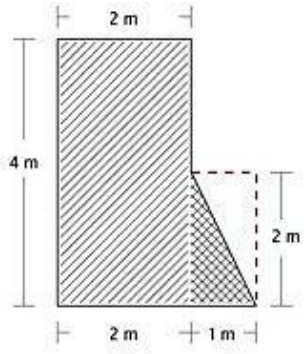
c)



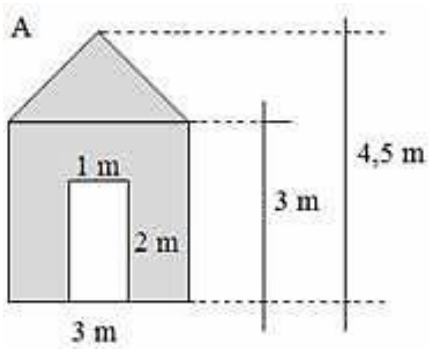
d)



e)



f)



Coordenadas Cartesianas

EJERCICIO Nº3: En un par de ejes coordenados cartesianos:

- **a)** Representar los siguientes puntos en el planos: R (1,5); S (4,3); T(3,-6); U (-2, -4); V (-3, -3) y W(-5, 4).
- **b)** Unir en el grafico sucesivamente los puntos R, S, T, U, V y W y determinar la figura proyectada. -
- **c)** Encontrar el perímetro de la figura de la figura encontrada. –

MODULO IV: POLINOMIOS (1° PARTE).

Se entiende por polinomio a un conjunto de expresiones algebraicas. Una expresión algebraica es la combinación de números expresados por cifras o letras vinculadas por las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación).

Un polinomio en una sola variable toma la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

Donde **"n"** es un número entero positivo y los coeficientes **"a"** pertenecen al campo de los números reales y el coeficiente del primer término es distinto de cero. Este polinomio decimos que "es un polinomio en "x" de grado "n".

Los polinomios de un solo términos se llaman "Monomios", los de dos términos "Binomios" los de tres "Trinomios" los de cuatro "Cuatrinomio", lo de 5, 6, 7… se llaman "Polinomios de 5, 6, 7… términos".

Elementos de un Monomio:
Un Monomio posee una serie de elementos con denominación propia.

Dado el monomio $5x^3$, se distinguen los siguientes elementos:

- **coeficiente:** 5
- **parte literal:** x^3

El coeficiente de un monomio es el factor numérico que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si tiene valor 1 no se escribe; y nunca puede ser cero ya que la expresión completa tendría valor cero.

*Se dice que dos o más monomios son **"semejantes"** cuando tienen la misma parte literal.*
Ejemplo:

$35\ a^3bx; \quad -8a^3bx; \quad \frac{3}{8}a^3bx \quad son\ monomios\ semejante\ pues\ tienen\ la\ misma\ parte\ literal$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

- Suma y resta de monomios semejantes:

Para realizar la suma algebraica de dos o más monomios semejantes, se saca factor común la parte literal, y se efectúa la suma o resta de los coeficientes o partes numéricas. Ejemplo. Realizar la suma algebraica de los siguientes monomios semejantes.

$$-4x^2z + 6x^2z - \frac{-2}{5}x^2z = \frac{12}{5}x^2z$$

- Suma algebraica de polinomios

Para sumar dos o más polinomios entre sí, se colocan uno debajo de otro encolumnando los términos semejantes, procediendo luego a efectuar el procedimiento visto para la suma de monomios semejantes (es decir en cada columna de monomios semejantes sacamos factor común la parte literal y realizamos la suma algebraica de su parte numérica). Ejemplo: sumar

algebraicamente los siguientes polinomios.

$$5x^2y - 3x^2 + 10y^2 \quad ; \quad 4x^2 + \frac{2}{5}y^2 \quad ; \quad 6x^2y + 2y$$

Ordenamos los polinomios encolumnando los monomios semejantes. Si existiese algún término que no tenga semejante se coloca en otra columna.

$$\begin{array}{llll} 5x^2y & -\ 3x^2 & +\ 10y^2 & \\ & 4x^2 & +\ \frac{2}{5}y^2 & \\ 6x^2y & & & +\ 2y \\ \hline 11x^2y & +\ x^2 & +\ \frac{52}{5}y^2 & +\ 2y \end{array}$$

Dado el producto de un polinomio por un monomio, se aplica propiedad distributiva, multiplicando cada termino del polinomio por el monomio, teniendo cuidado con los signos y con los exponentes de la parte literal (producto de potencia de igual base). Ejemplo:

$$(2x^3 + 3x^2 - x + 3x^5a) \times (2x^2) = (2x^3 \times 2x^2) + (3x^2 \times 2x^2) - (x \times 2x^2) + (3x^5a \times 2x^2)$$

$$= 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 6x^7a$$

a) Multiplicación entre dos polinomios

Se multiplican todos los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro factor. Se ordenan los productos en columnas de monomios semejantes y se suma por columnas.

Ejemplo: Multiplicar $(3x^2 + 2x - 3) \times (2x - 4) =$

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 2x - 3 \\ \text{x}\quad 2x - 4 \\ \hline 6x^3 + 4x^2 - 6x \\ +\quad -12x^2 - 8x + 12 \\ \hline 6x^3 - 8x^2 - 14x + 12 \end{array}$$

- División entre polinomio

Para dividir entre si dos polinomios se ordenan dividendo y divisor según las potencias decrecientes de las mismas letras. Es conveniente completar al polinomio dividendo con términos del grado faltante y de coeficiente nulo si faltare alguno. Se divide el primer término del dividendo con el primero del divisor y así se obtiene el primer término del cociente. Para ello se busca para el cociente un término que multiplicado por el primero del divisor de un término igual al primero del dividendo. Se multiplica todo el divisor por el término obtenido para el cociente y este producto se resta del dividendo. Se repiten las operaciones hasta obtener un resto de grado menor que el divisor.

Ejemplo: dividir $(6x^3 - 2x^2 + 9x + 3) \div (3x^2 - 2x + 2)$.

C.A.

$2x(3x^2) = 6x^3$
$2x(-2x) = -4x^2$
$2x \times 2 = 4x$
$\frac{2}{3} \times 3x^2 = 2x^2$
$\frac{2}{3} \times (-2x) = -\frac{4}{3}x$
$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 2x^2 + 9x + 3 & 3x^2 - 2x + 2 \\ \hline 6x^3 - 4x^2 + 4x & 2x + \frac{2}{3} \\ \hline 0 \quad + 2x^2 + 5x + 3 & \\ -\quad 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} & \\ \hline 0 \quad + \frac{19}{3}x + \frac{5}{3} & \end{array}$$

$C = 2x + \frac{2}{3}$

$R = \frac{19}{3}x + \frac{5}{3}$

Para verificar si la operación fue bien realizada, se multiplica el cociente obtenido por el divisor, y a este producto le sumamos el resto obteniéndose como resultado el dividendo.

$$[(3x^2 - 2x + 2) \times (2x + \frac{2}{3})] + (\frac{19}{3}x + \frac{5}{3}) = 6x^3 - 2x^2 + 9x + 3$$

MODULO IV

TRABAJO PRACTICO: POLINOMIOS (1°PARTE)

EJERCICIO Nº1: Sumar los siguientes Monomios:

a) $3x^2$; $-1/8x^2$; $5/9x^2$ **b)** $2/3z^2y^4$; $-3z^2y^4$; $7z^2y^4$ **c)** $-3/5m^3x^2t^5$; $-2m^3x^2t^5$; $3/9m^3x^2t^5$

d) $-3/2xy^2z^3$; $5xy^2z^3$; $5/7xy^2z^3$ **e)** $3zx^2y^3$; $-4xz^2y^3$; $9zx^3y^3$

f) $6/9tz^5w^3$; $-9tz^5w^3$; tz^5w^3

EJERCICIO Nº 2: Sumar los siguientes polinomios:

a) $3yx^2-7zy^3+3mx^5$; $5/3zy^3+4mx^5-2/7yx^2$; $-2y^2x^2+1/4mx^5+9yx^2$

b) $-1/4zx^2+6y^3x^2+2/3ax^2$; $5ax^2-5/9y^3x^2-2/9az^2$; $15az^2+12zx^2+1/4y^3x^2$

c) $1/17ma^2-6ma^3+ma^4$; $5ma^3-8/5ma^4-1/6ma^2$; $-3/7ma^3+ma^2-5/8ma^4+5ax^2$

d) $2/9xy^2+4mxy^3+1/7axy^4$;$+7axy^4-3/8mxy^3+6axy^2$; $7/3mxy^3-2axy^4-axy^2$

e) Encontrar la expresión que sumada a $(4x^2-2x^4+3x^3)$ nos da $(x^2 - 2)$

f) Encontrar la expresión que sumada a $(-4my^2+my^3-3my^4)$ nos da $(2my^2 + 5)$

EJERCICIO Nº 3: Multiplicación de Polinomios:

a) $(m^3+nm^2+mn^2+n^2) \,.\, (m-n\,) =$

b) $(3/5x^3-xy \;\; +1/2y^2) \;.(x-3y) =$

c) $(xa^3-2a^3x^2+3ax^3-8x^4) \,.\, (4a^2-2x^2 \,+\, 2ax) =$

d) $(2nm^3-3m^2n^2 \,+\, 5) \,.\, (3/7n^4+1/5mn^4) \;\; =$

e) $(-2x^4+1/4x^3+x^5-8x^2) \,.\, (4x \,-\, 3) =$

e) $(3mx^3-7/8nx^2-2x^2) \;\; .\, (5nx^3-2xm^2+3x^3-1/4mx) \;=$

EJERCICIO Nº 4: División de Polinomios

a) $(4m^5-3m^3+2m^2 - \; m+8/3) \;\div\; (-2m^2+3) =$

b) $(-5m^5+2m^3+5/3m^2+2m-1) \;\div\; (3/5m^2-2m+1) =$

c) $(3x^7-5x^5+9x^3+x^2-2x+4) \;\; \div \;\; (-2x^2-1/3\,x \;\; +2) =$

d) $(2y^4-5y^3+8y^2-3) \;\; \div (1/4y^2-3) =$

e) $(-3a^6+6/7a^3+a^2-3) \;\div\; (3/7a^3-2a^2) =$

MODULO V: POLINOMIOS (2°PARTE).

Regla de Ruffini.

La regla enunciada por Ruffini permite realizar de manera simple el cociente entre un polinomio en ***"x"*** y un binomio de la forma $(x - a)$. Se ordenan los términos del polinomio dividendo, completando si faltare alguno con término del grado faltante y coeficiente nulo. Luego se procede de la siguiente manera:

- El primer término del cociente tiene el mismo coeficiente que el primero del dividendo. La variable en el cociente tiene un exponente una unidad menor que el correspondiente al dividendo. El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

- Cada coeficiente de los términos siguientes se obtiene multiplicando el anterior por ***"a"*** sumando luego ese producto al coeficiente de igual posición del dividendo. El resto se obtiene de la misma manera. Se multiplica el término independiente del cociente por ***"a"*** y se lo suma al término independiente del dividendo.

Ejemplo: Resolver aplicando la regla de Ruffini. $(2x^4 - 9x^3 + 7x - 15) \div (x - 4) =$

- Observamos que el polinomio dividendo no está completo. En consecuencia procedemos a completarlo con término de coeficiente nulo y parte literal elevada a la potencia que falta.

$$(2x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 7x - 15) \div (x - 4) =$$

- Ordenando de la siguiente manera, colocamos los coeficientes del dividendo en esta tabla y procedemos a efectuar las operaciones.

	2	−9	0	7	−15
$a = 4$		8	−4	−16	−36
	2	−1	−4	−9	−51

$C = 2x^3 - x^2 - 4x - 9$

$R = -51$

Teorema del resto.

Si bien el resto de una división entre un polinomio en "x" de cualquier grado por un binomio de la forma $(x - a)$ se puede obtener fácilmente mediante la aplicación de la regla de Ruffini, resulta más simple y directo calcular el resto mediante la aplicación del conocido "TEOREMA DEL RESTO".

Este se enuncia de la siguiente manera: El resto de la división de un polinomio en "x", por un binomio de la forma $(x - a)$, es el valor numérico del polinomio dividendo para "x" igual a "a".

Dicho de forma más sencilla es el valor que resulta de reemplazar en el dividendo la variable "x" por el valor constante "a" y efectuar las operaciones indicadas en los distintos términos del polinomio. En el ejemplo anterior:

$$(2x^4 - 9x^3 + 7x - 15) \div (x - 4) =$$

- Como analizamos anteriormente, podemos decir que: **a = 4**
- No es necesario ordenar ni completar el polinomio para aplicar el Teorema.
- El dividendo es: $D(x) = (2x^4 - 9x^3 + 7x - 15)$
- El resto estará dado por: $R = D(4) = 2 \times 4^4 - 9 \times 4^3 + 7 \times 4 - 15 = -51$ $\boxed{R = -51}$

MODULO V

TRABAJO PRACTICO: POLINOMIOS (2°PARTE).

EJERCICIO Nº1: Resolver aplicando Ruffini y verificar haciendo la división:

a) $(4m^5 - 1/3m^3 + 2m^2 - m + 8/3) \div (m - 3) =$

b) $(3x^7 - 5x^5 + 1/8x^3 + x^2 - 2x + 4) \div (x + 2) =$

c) $(2y^4 - 5y^3 + 8y^2 - 3) \div (y + 5) =$

d) $(-3a^6 + 6/7a^3 + a^2 - 3) \div (a - 7) =$

e) $(3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x + 3) \div (x + 1) =$

EJERCICIO Nº 2: Resolver aplicando Teorema del Resto:

a) $(4m^5 - 1/3m^3 + 2m^2 - m + 8/3) \div (m - 3) =$

b) $(3x^7 - 5x^5 + 1/8x^3 + x^2 - 2x + 4) \div (x + 2) =$

c) $(2y^4-5y^3+8y^2-3) \div (y+5) =$

d) $(-3a^6+6/7a^3+a^2-3) \div (a-7) =$

f) $(3x^5-2x^4+6x^3-x+3) \div (x+1) =$

MODULO V (continuación): MAGNITUDES Y UNIDADES.

Una magnitud es cualquier propiedad de los cuerpos que se puede medir. Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad fija llamada unidad de medida. **Es decir, comparar una cantidad con su correspondiente unidad.**

Una medida se expresa con un número y una unidad de medida. Algunas magnitudes importantes:

A) La Longitud cuya unidad de medida principal es el metro.
B) La Superficie cuya unidad de medida es el metro cuadrado
C) La Masa cuya unidad de medida principal es el kilogramo.
D) La Capacidad cuya unidad de medida principal es el litro.
E) El Volumen cuya unidad de medida es el metro cubico.

A) Medidas de Longitud.

La longitud determina la distancia que hay entre dos puntos, o dicho de otra manera, **longitud es la cantidad de espacio que hay entre dos puntos**. Por ejemplo, la distancia que hay entre mi casa y la Facultad, o la distancia de un potrero a la aguada. El sistema métrico decimal (SMD) es el más utilizado para realizar las medidas. Se llama decimal porque sus unidades van de diez en diez. La **unidad principal** para medir la **longitud** es el **metro**.

Pero, ¿qué hago si quiero medir objetos mucho más pequeños? ¿U objetos mucho más grandes? Para eso tenemos más medidas de longitud: los múltiplos y los submúltiplos del metro.

Para expresar las longitudes pequeñas utilizamos los **submúltiplos del metro**: - El decímetro (dm) - El centímetro (cm) - El milímetro (mm).

Para expresar las longitudes grandes utilizamos los **múltiplos del metro**: - El decámetro (dam) - El hectómetro (hm) - El kilómetro (km).

Para transformar una unidad de longitud en la unidad inmediatamente inferior o superior, multiplicamos o dividimos por 10 respectivamente.

Las relaciones entre estas unidades de longitud se recogen del siguiente gráfico:

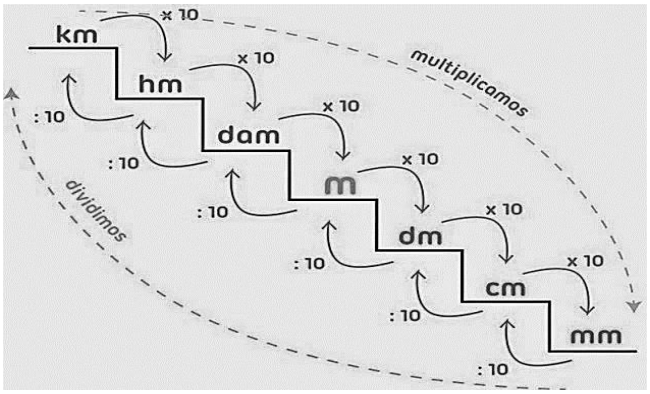


Tabla I. Unidades de longitud con su respectiva abreviatura y su valor en metros

MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS		
kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1.000 m	100 m	10m	1	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Ejemplo: Pablo para mantener su colesterol en niveles normales, debe realizar caminatas diarias de 5 kilómetros. ¿Cuantos metros equivalen estos 5 km?

Si observamos el grafico vemos que para pasar de km a metro existen tres saltos en descenso por diez (10 x 10 x 10=1000). En consecuencia, a los 5 km debemos multiplicarlo por 1000. Es decir, Pablo corre 5000 metros diarios.

Ejemplo: Luego de su caminata debe ingerir 70 milímetros de una barrita multivitamínica recomendada por su medica Deportologa. ¿Cuántos centímetros son??

Nuevamente observando el grafico vemos que de mm a cm existe solo un ascenso dividido en diez es decir los 70 mm lo dividimos en diez. En consecuencia la barrita mide 7 cm.

B) Medidas de superficie

Para medir superficies (áreas) se utilizan distintas unidades de medida. La más utilizada es el metro cuadrado (m^2). Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado cuyo lado mide un metro.

También existen unidades de medidas mayores y menores al metro cuadrado. Para transformar una unidad de superficie en la unidad inmediatamente inferior o superior, multiplicamos o dividimos por 100 respectivamente

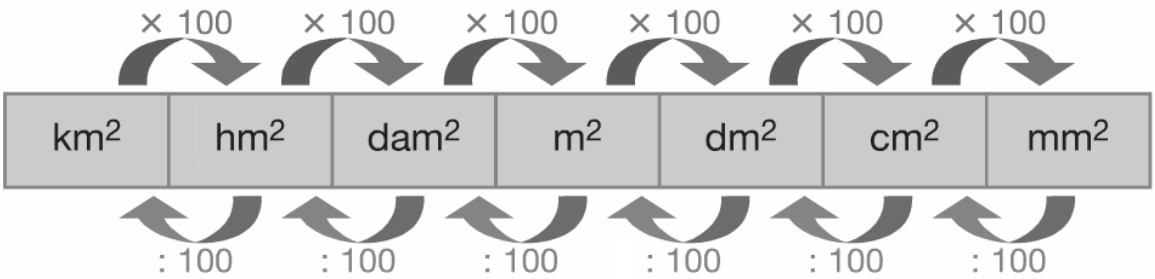


Tabla II. unidades de superficie, con su respectiva abreviatura y su valor en metros cuadrados.

Kilómetro cuadrado	**km^2**	1 000 000 m^2
Hectómetro cuadrado	**hm^2**	10 000 m^2
Decámetro cuadrado	**dam^2**	100 m^2
Metro cuadrado	**m^2**	**m^2**
Decímetro cuadrado	**dm^2**	0,01 m^2
Centímetro cuadrado	**cm^2**	0,0001 m^2
Milímetro cuadrado	**mm^2**	0,000001 m^2

Ejemplo: Jaimito quiere comprar un placard que ocupa 25.000 cm^2 de superficie, pero duda si podrá entrar en su habitación la cual tiene una superficie de 4m x 5m = 20 m^2. Cuantos m^2 de superficie ocupara el placard?.

Desde cm^2 a m^2 hay dos posiciones hacia la izquierda, tendremos que dividir por 100 dos veces,
es decir por 10.000; y para ello corremos la coma de decimales 4 lugares a la izquierda: 25.000: 10.000 = 2,5 m^2.

Recomendamos a Jaimito que compre tranquilamente el placard ya que solo ocupa 2,5 m^2 de superficie.

C) Medidas Agrarias

Llamamos medidas agrarias a las medidas de superficie para medir los campos o parcelas rurales. Su **unidad** principal es el área o decámetro cuadrado. El área es un decámetro cuadrado (que tiene 100 m^2). El área tiene un **múltiplo**, que es la hectárea, que equivale a 100 áreas o 10.000 m^2. También tiene un **submúltiplo** que es la centiárea (que vale 1 m^2)

1 ha = 1 hm^2 = 10.000 m^2
1 a = 1 dam^2 = 100 m^2
1 ca = 1 m^2

Ejemplo: Carlitos fue a una inmobiliaria y le ofrecieron una finca de 40 km^2 de superficie en la Cuenca de Pozuelos, de excelente aptitud para la cría de Ovinos y Camélidos Sudamericanos. Desea averiguar cuantas hectáreas equivalen.

Uno de los tantos razonamientos sencillos sería el siguiente:

1 ha= 1 hm^2.

1 km^2= 100 hm^2. Por lo tanto 40 km^2= 4.000 hm^2.

Por lo tanto 4000 hm^2= 4.000 ha.

Ejemplo**:** ¿Cuántas hectáreas equivale un cultivo de algodón de 356.500 m^2?

356500 / 10.000 = 35,65 ha.

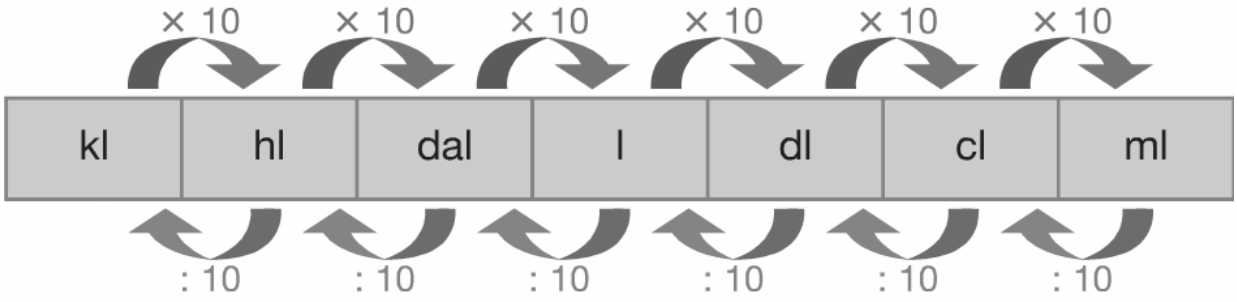
D) Medidas de capacidad

La capacidad mide la **cantidad de líquido que cabe dentro de un objeto**. Por ejemplo, la capacidad de una mochila pulverizadora muestra la cantidad de líquido plaguicida con la que podemos llenarla.

Otra forma de llamar a la **capacidad** es **volumen**. Digamos que **la capacidad es el volumen que ocupa un cuerpo en el espacio**.

La unidad principal para medir la capacidad de un objeto es el **litro**. Pero no es la única que tenemos. Están los **múltiplos** (Kilolitro, Hectolitro, Decalitro**)**, que son las unidades para expresar capacidades más grandes que el litro y los **submúltiplos** (decilitro, centilitro, mililitro) que son las unidades para expresar capacidades más pequeñas.

Unidades de capacidad y relación que existe entre ellas:



Ejemplo

- Para pasar de hl a l multiplicamos por 100
- Para pasar de l a hl dividimos por 100
- Para pasar de l a cl multiplicamos por 100
- Para pasar de cl a l dividimos por 100.

Unidades de capacidad				
	Unidad	Símbolo	Equivale a	También a
Múltiplos	Kilolitro	kl	1 000 l	10^3 l
	Hectolitro	hl	100 l	10^2 l
	Decalitro	dal	10 l	10^1 l
Unidad principal	Litro	l	1 l	10^0 l = 1 l
Submúltiplos	Decilitro	dl	0.1 l	1 L = 10 dl
	Centilitro	cl	0.01 l	1 L = 100 cl
	Mililitro	ml	0.001 l	1 L = 1000 ml

E) Medidas de volumen

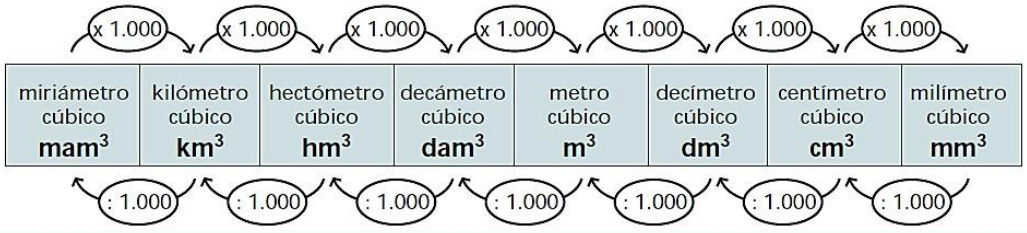
Las medidas de Volumen se emplean para medir el espacio ocupado por los objetos que tienen tres dimensiones (ancho, largo y alto). Ejemplo el volumen de agua de riego dotada en un lapso de tiempo. El volumen ocupado por 100 tn de maíz, el volumen de agua almacenado parcialmente en una presa. La unidad básica es el **metro cúbico**, que equivale al volumen de un cubo que tiene un metro de ancho por un metro de largo por un metro de alto.

A diferencia de las Unidades de Superficie (de dos dimensiones), en las Unidades de Volumen, al ser de tres dimensiones (ancho, largo y alto), el valor de cada unidad es mil veces mayor (10 x 10 x 10 = 1000) que la unidad inmediata inferior.

Unidades de volumen y relación que existe entre ellas

La principal unidad de volumen es el metro cúbico.

Cada unidad de volumen es 1.000 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 1.000 veces menor que la unidad inmediata superior.

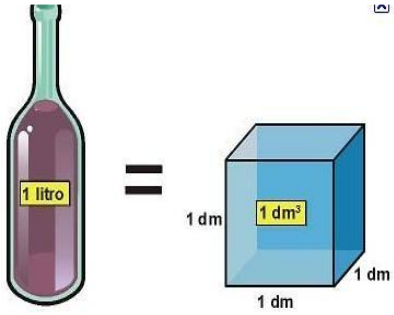


Unidades de volumen

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico:

	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	Kilómetro cúbico	Km ³	1 Km ³ = 1 000 000 000 m ³
	Hectómetro cúbico	hm ³	1 hm ³ = 1 000 000 m ³
	Decámetro cúbico	dam ³	1 dam ³ = 1000 m ³
	Metro cúbico	m ³	1 m ³
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm ³	1 dm ³ = 0,001 m ³
	Centímetro cúbico	cm ³	1 cm ³ = 0,000001 m ³
	Milímetro cúbico	mm ³	1 mm ³ = 0,000000001 m ³

Como las **medidas de capacidad** sirven para medir los líquidos principalmente, se relacionan con las **medidas de volumen**, porque estas nos permiten ver cuanto líquido cabe en un espacio.



MODULO V (continuación)

TRABAJO PRACTICO: UNIDADES DE MEDIDA

Ejercicio Nº1: Utilizando el SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) realizar los siguientes ejercicios reduciendo las magnitudes solicitadas:

UNIDADES DE PESO

Kilógramo	Hectógramo	Decágramo	gramo	decígramo	centígramo	milígramo
Kg.	Hg.	Dg.	g.	dg.	cg.	mg.
1.000 g.	100 g.	10 g.	1 g.	0,1 g.	0,01 g.	0,001 g.

UNIDADES DE CAPACIDAD

Kilólitro	Hectólitro	Decálitro	litro	decílitro	centílitro	mililitro
Kl.	Hl.	Dl.	l.	dl.	cl.	ml.
1.000 l.	100 l.	10 l.	1 l.	0,1 l.	0,01 l.	0,001 l.

UNIDADES DE VOLUMEN

Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1.000.000.000 m^3	1.000.000 m^3	1.000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,00000000 m^3

UNIDADES DE SUPERFICIE

Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrado	Decámetro cuadrado	metro cuadrado	decímetro cuadrado	centímetro cuadrado	milímetro cuadrado
Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000001 m^2

UNIDADES DE LONGITUD

Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
Km.	Hm.	Dm.	m.	dm.	cm.	mm.
1.000 m.	100 m.	10 m.	1 m.	0,1 m.	0,01 m.	0,001 m

a) Completa la tabla

Kl	hl	dal	L	dl	cl	ml
			3,748			
	102,37					
						12589900
					89,458	

EJERCICIO Nº 2: Resolver los siguientes ejercicios:

a) 100 cm a m

b) 23,168 mm a dam

c) 0,01589 km a mm

d) 2100 m2 a mm2

e) 20 hm2 a cm2

f) 45 dam2 a m2

g) 1234,2 dm2 a m2

h) 5,5 hm2 a m2

I) 5 hg a g

j) 12589 mg a kg l) 2,35 dg a dag m) 145890 mg a hg

n) 6 Hm3 a m3 ñ) 14 Hl a cl o) 15 ml a Kl p) 0.5 Dm3 a cm3

EJERCICIOS Nº3: Realizar las siguientes operaciones:

r.1) : 12 Km + 3,5 dam + 358,36 mm = expresar el resultado en m

r.2) : 35 dl – 0,11ml + 269 hl + 5987 dl = expresar el resultado en dal

r.3) : 35,26 mg – 17 dg + 1236hg – 1 kg= expresar en resultado en g

r.4) : 365 km2 – 23005,56 dm2 + 7 dam2 – 2 mm2 = expresar en resultado en hm2

r.5) 3654 Cm3 + 1256,25 hm3 = expresarlas en m3

MODULO VI: FACTOREO

Factorear un numero significa "expresarlo como el producto de otros polinomios, llamados factores del polinomio dado". Dicho de otra manera, **transformamos la suma algebraica que constituye al polinomio en el producto de cierto número de polinomios.**

A los fines de convertir un polinomio en el producto de otros, vamos a considerar seis casos que se aplican en otras tantas situaciones diferentes. Para factorear un polinomio, es conveniente antes de su realización analizar bien cuál es el caso de factoreo que nos permite realizar la transformación referida.

1) PRIMER CASO – FACTOR COMUN.

Cuando todos los términos que integran el polinomio tienen uno o varios factores en comunes, se sacan estos y se indican multiplicando a los términos que quedan luego de haber dividido cada uno de ellos por el o los factores comunes. Los términos residuales se encierran en un paréntesis que se multiplica por los factores comunes.

Ejemplo: factorear: $-6x^2y^3 + 3x^3y^2 + 12xy^3z - 9xy^2z =$

- Se observa que los factores $3,\ x,\ y^2$ están contenidos en todos los términos del polinomio. En consecuencia $3,\ x,\ y^2$ es la expresión que sacaremos fuera del paréntesis, quedando dentro del mismo los cocientes que resulten de dividir los términos del polinomio por el factor común.

$$-6x^2y^3 + 3x^3y^2 + 12xy^3z - 9xy^2z = \boxed{3xy^2(-2xy + x^2 + 4yz - 3z)}$$

- De esta manera hemos transformado un polinomio de cuatro términos en el producto de un monomio por un polinomio de cuatro términos, es decir hemos factoreado.

2) SEGUNDO CASO – DESCOMPOSICION EN GRUPOS.

El método consiste en separar los términos del polinomio en grupos de igual número de términos que tengan ellos un factor en común. Luego se extrae el factor común de cada grupo quedando así el polinomio factoreado.

Ejemplo: Factorear $2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b =$

- En el ejemplo podemos descomponer el polinomio en dos grupos de tres términos cada uno. El grupo integrado por los términos $2ax,\ -ay,\ 5a$**,** tiene como factor en común a "a"**,** en tanto que los términos$2bx,\ -by,\ 5b$ tienen como factor común "b"**.** Luego nuestro polinomio queda de la siguiente manera:

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = (2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b) =$$

$$= (2x - y + 5) + (2x - y + 5) =$$

- Si observamos en detalle, los dos paréntesis son iguales, por lo tanto, pueden extraerse los mismos como factores comunes, lográndose de esta manera el factoreo del polinomio origen.

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = \boxed{(2x - y + 5)\ (a + b)}$$

3) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Cuando tenemos un polinomio de tres términos, en lo que dos de ellos son cuadrados y el restante resulta ser el duplo del producto de las bases de los cuadrados; el polinomio puede escribirse como el cuadrado de un binomio. Recordando:

$$(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo: Factorear: $a^4 + \frac{1}{4}p^2 + a^2p^2 =$

- En el polinomio dado, el primer y segundo término son cuadrados perfectos.

$$a^4 = (a^2)^2 \quad ; \quad \frac{1}{4}p^4 = (\frac{1}{2}p^2)^2$$

- El otro término es igual al duplo de las bases de los cuadrados (factores entre paréntesis).

$$a^2p^2 = 2.(a^2).(\frac{1}{2}p^2)$$

- En consecuencia, podemos escribir:

$$a^4 + \frac{1}{4}p^2 + a^2p^2 = a^4 + +a^2p^2 + \frac{1}{4}p^2 = (a^2 + \frac{1}{2}p^2)^2 = (a^2 + \frac{1}{2}p^2).(a^2 + \frac{1}{2}p^2)$$

4) CUATRINOMIO CUBO PERFECTO.

Si tenemos un polinomio de cuatro términos, de los cuales dos son cubos perfectos y los otros dos son iguales al triple del producto del cuadrado de la base de uno de los cubos por la base del otro, el polinomio puede factorearse teniendo en cuenta que:

$$(a+b)^3 = (a+b)\times(a+b)\times(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = (a-b)\times(a-b)\times(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo: Factorear $x^6 + 6x^4 + 12x^2y^2 + 8y^3 =$

- El primer y cuarto termino son cubos perfectos, en tanto falta por averiguar si los otros dos términos cumplen con la condición necesaria para considerar al polinomio como un cuatrinomio cubo perfecto.

$$x^6 = (x^2)^3 \quad ; \quad 8y^3 = (2y)^3$$

$$3(x^2)^2.(2y) = 6x^4y \quad ; \quad 3(x^2).(2y)^2 = 12x^2y^2$$

- Efectivamente cumplen con la condición necesaria el tercer y cuarto término.
- Finalmente podemos escribir:

$$x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 = (x^2 + 2y)^3 = \boxed{(x^2 + 2y).(x^2 + 2y).(x^2 + 2y)}$$

5) QUINTO CASO – DIFERNECIA DE CUADRADOS.

Cuando el polinomio está formado por la resta de dos monomios que son cuadrados, podemos factorearlos aplicando la diferencia de cuadrados. Recordando que:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)}$$

Ejemplo: Factorear: $144m^6 - 121x^8 =$

- Ambos términos se pueden escribir como cuadrados.

$$144m^6 = (12m^3)^2 \quad ; \quad 121x^8 = (11x^4)^2$$

- El polinomio origen resulta:

$$144m^6 - 121x^8 = (12m^3)^2 - (11x^4)^2 = \boxed{(12m^3 - 11x^4) \times (12m^3 + 11x^4)}$$

6) SEXTO CASO – SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS.

En los casos en que el polinomio a factorear sea un binomio compuesto por la suma o diferencia de cubos; el factoreo se logra recordando las siguientes expresiones de fácil demostración (con solo realizar las operaciones indicadas se verifican las igualdades).

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b).(a^2 - ab + b^2)} \qquad \boxed{a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplo: Factorear $a^3 - 27b^3$

- A este polinomio lo podemos expresar: $a^3 - (3b)^3$

$$a^3 - (3b)^3 = (a - 3b).[a^2 + a3b + (3b)^2]$$

$$a^3 - (3b)^3 = \boxed{(a - 3b).(a^2 + 3ab + 9b^2)}$$

MODULO VI

TRABAJO PRACTICO: FACTOREO

Primer caso de Factoreo

EJERCICIO Nº1: Factorear sacando Factor Común

a) $4x^3y^2 - 2yx^2 + 8/9zx^4y^5 =$

b) $9abx^2 - 3xa^2b^3 + 3azx^2 =$

c) $4/3xa^2 - 8/9ax^3 + 16/15a^5x^7 - 2/3x^5a^4 =$

d) $5x^2(x-y) + 3x\,(x-y) + 7\,(x-y) =$

e) $125a^4b^5c^5 - 45a^5b^3c^4x^3 + 5a^3b^2c^4 - 300xa^4b^2c^3 - 10a^3b^2c^3 =$

Segundo caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 2: Factorear sacando Factor Común por Grupos

a) $3x - 2ab + nx - 2bx + an + 3a =$

b) $abxn + 2mx^2 + 2ax^2 + axb^2 + 2bx^2 + bxa^2 =$

c) $2mx + xn^3 - 2my - yn^3 =$

d) $6ax^2 - 12mxa^3 + 4yn^5 + 2zny^3 + 18zny =$

e) $5a - ax + 5b + 5c - bx - cx + 25 - 5x =$

Tercer caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 3: Factorear los Trinomios cuadrados Perfectos

a) $25x^2 + 10xy^2 + y^4 =$

b) $-12a^2byx^2 + 4b^2y^2 + 9x^4a^4 =$

c) $-4m^3y^3z^3+4m^4y^6+m^2z^4$ =

d) $3/2z^5m^2+1/16m^4z^4+9m^2z^6$ =

e) $-1/7xa^3y^2z^2+1/4z^4y^4+1/49x^2a^6$ =

Cuarto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 4: Factorear los Cuatrinomios Cubos Perfectos

a) $-8y^3+12xy^2-6yx^2+x^3$ =

b) $3/2m^3+6m^4+8m^9+1/8$ =

c) $3/100a^{12}z^2+1/64a^6+1/125a^{15}z^3+3/80za^9$ =

d) $-2/3mx^5a^2+1/27a^3x^6-8x^3m^3+4ax^3m^2$ =

e) $27ax^2y^2m^2+27x^3y^3+a^3m^6+9xya^2m^4$ =

Quinto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 5: Factorear las siguientes Diferencias de Cuadrados

a) $16x^4y^6-25a^{10}z^2$ =

b) $1/49a^8b^4-1/4m^4x^{16}$ =

c) $144x^{24}z^8a^2-225y^2z^4y^{12}$ =

d) x^2-4 =

e) $25x^2-1$ =

Sexto caso de Factoreo

EJERCICIO Nº 6: Factorear las siguientes Sumas o Diferencias de Cubos

a) $64m^3+125n^6$ =

b) $27x^3 + 64$ =

c) $64m^3-125n^6$ =

d) $1728y^6z^{60}-512x^3y^3$ =

e) $1/27z^{27}y^3-1/64x^3a^{126}$ =

Re-Edición 2023:

Ing. Agr. Esteban A. Molina (Tecnicatura Universitaria en Producción de Animales de Granja, Tecnicatura Universitaria en Transformación de la Producción Agropecuaria, Coordinador Aula Virtual Matemática)

Dra. en Alimentos Sonia Calliope (Tecnicatura Universitaria en Producción de Animales de Granja, Tecnicatura Universitaria en Mecanización Agrícola)

Colaboradores:

Ingeniería Agronómica SSJ:

C.P.N Luciana Vera
C.P.N Luciano Alcides Tolaba
Ing. Agr. Patricia Verónica Velasquez
Ing. Agr. Javier Bautista

Licenciatura en Bromatología:

Ing. Ind. Fabián Cáceres
Ing. Agr. José Cruz
Lic. en Cs. Biológicas Bibiana Elizabeth Calizaya
C.P.N Doriz Ibarra Ortega

Licenciatura en Cs. Biológicas:

Ing. Qco. J. Ismael Saravia
Ing. Agr. Carlos Quintana
Ing. Agr Marta Celia Leaño
Lic. en Cs. Biológicas Andrea del Valle Guanuco
Lic. en Brom. Indira Macarena Lopez
Lic. en Cs. Biológicas Alicia Cruz

Tecnicatura Universitaria en Mecanización Agrícola:

Ing. Agr. Mariana Aquino

Tecnicatura Universitaria en Transformación de la Producción Agropecuaria:

Lic. en Cs. Biológicas Roque Yapura

Tecnicatura Universitaria Forestal:

Ing. Agr. Yanet Arroyo

Licenciatura en Desarrollo Rural:

Lic. en Brom. Cristian Burgos
Ing. Agr. Jorge Gustavo Chauque

Licenciatura en Gestión Ambiental:

Lic. en Cs. Biológicas Edgardo Gustavo Hinojosa
Lic. en Cs. Biológicas Maria Magdalena Reader

Ingeniería Agronómica San Pedro:

Ing. Agr. Norma Condorí Zapana
Ing. Agr. Samuel B. Gaspar